第27卷 第4期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 4
2010年08月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Aug. 2010

**文章编号**:1005-3085(2010)04-0669-10

# 二阶椭圆问题的最小二乘扩展混合有限元方法*

丁 胜， 陈焕贞†

(山东师范大学数学科学学院，济南 250014)

**摘 要**: 为克服最小二乘混合元方法在数值模拟具小扩散系数或低渗透率问题时，应对扩散系数求逆带来的困难，本文基于最小二乘与扩展混合元的思想，对一类刻画扩散、渗透过程的二阶椭圆问题建立了最小二乘扩展混合元格式，证明了格式的稳定性和收敛性质。论证表明，该格式具有无需对小扩散系数求逆，较好的克服了小扩散系数带来的困难；能同时高精度逼近未知函数，梯度及其通量；有限元空间无需满足LBB条件；刚度矩阵对称正定等最小二乘方法和扩展混合元方法的良好性质。数值算例说明了所提算法的有效性。

**关键词**: 二阶椭圆问题；最小二乘方法；扩展混合有限元方法；最优误差估计

**分类号**: **AMS**(2000) 65N30　　**中图分类号**: O241.82　　**文献标识码**: A

## 1 引言

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n\ (n=1,2,3)$ 为有界凸域，边界 $\Gamma=\Gamma_D\bigcup\Gamma_N\ (\Gamma_D\neq\emptyset)$ Lipschitz 连续，考虑下列二阶椭圆边值问题

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(A\nabla u(x))=f(x), & x\in\Omega,\\ u(x)=0, & x\in\Gamma_D,\\ (-A\nabla u(x))\cdot n=0, & x\in\Gamma_N, \end{cases}\tag{1}$$

其中 $\nabla u$ 表示函数 $u$ 的梯度，$\nabla\cdot q$ 表示向量函数 $q$ 的散度，$n$ 是 $\Omega$ 的单位外法向量，矩阵 $A=(a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$，$x\in\bar\Omega$ 对称正定，且存在正常数 $\alpha_*$ 和 $\alpha^*$，使得

$$\alpha_*\chi^T\chi\le\chi^TA\chi\le\alpha^*\chi^T\chi,\quad \forall\,\chi\in\mathbb{R}^n.\tag{2}$$

对上述二阶椭圆问题人们提出了很多数值模拟方法，如有限元方法[1]，混合有限元方法[2]，扩展混合有限元方法[3,4]，最小二乘有限元方法和最小二乘混合有限元方法[5-7]等。扩展混合有限元方法由于具有能同时高精度逼近未知函数，未知函数的梯度和流体的通量，适合处理具有复杂边界条件和小系数问题的优点，因此在地下水动力学问题的模拟中得到了广泛的应用。但是该方法仍然要求有限元空间满足LBB相容性条件，限制了空间的选择，并且所形成的方程组是非正定的，计算复杂。为更好地数值模拟实际的地下水动力问题，人们希望构造一种既能具备扩展混合有限元方法的优点又不需要满足LBB相容性条件，计算简单的高效数值模拟方法。

**收稿日期**: 2008-09-09.　**作者简介**: 丁胜 (1982年12月生)，男，硕士. 研究方向：微分方程数值解.

***基金项目**: 国家自然科学基金 (10271068; 10971254)；山东省自然科学基金 (Y2007A14)；山东省优秀中青年科学家科研奖励基金 (2008BS01008).

†**通讯作者**: 陈焕贞　E-mail: chhzh@sdnu.edu.cn

本文将最小二乘思想和扩展混合有限元方法相结合，提出并分析了最小二乘扩展混合有限元方法。该方法继承了最小二乘和扩展混合有限元方法的优点，即格式能同时高精度逼近未知函数，未知函数的梯度以及流体的通量，所形成的有限元方程组是对称正定的且条件数为$O(h^{-2})$，易于计算，有限元空间无须满足LBB相容性条件，构造更灵活。数值算例说明了该方法的可行性和有效性。

## 2 变分形式

首先，给出几个用到的空间的定义

$$\Lambda = \left(L^2(\Omega)\right)^n, \quad V = \left\{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ 在 } \Gamma_D \text{ 上}\right\},$$

$$H(\mathrm{div};\Omega) = \left\{q \in (L^2(\Omega))^n : \nabla \cdot q \in L^2(\Omega)\right\},$$

$$W = \left\{q \in H(\mathrm{div};\Omega) : q \cdot n = 0 \text{ 在 } \Gamma_N \text{ 上}\right\}.$$

相应范数定义为

$$\| \mu \|_{0,\Omega} = (\mu, \mu)^{\frac{1}{2}}, \quad \mu \in \Lambda,$$

$$\| v \|_{1,\Omega} = \left( \| v \|_{0,\Omega}^2 + \| \nabla v \|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad v \in V,$$

$$\| q \|_{H(\mathrm{div};\Omega)} = \left( \| q \|_{0,\Omega}^2 + \| \nabla \cdot q \|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad q \in W,$$

其中$(\cdot,\cdot)$表示空间$L^2(\Omega)$或$(L^2(\Omega))^n$中的内积。

记$\lambda = -\nabla u$，$\sigma = A\lambda$，则(1)可变形为关于$u$, $\lambda$和$\sigma$的一阶方程组

$$\begin{cases} A\lambda - \sigma = 0, & x \in \Omega, \\ \lambda + \nabla u = 0, & x \in \Omega, \\ \nabla \cdot \sigma - f = 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \Gamma_D, \\ \sigma \cdot n = 0, & x \in \Gamma_N. \end{cases} \tag{3}$$

一阶形式(3)的最小二乘泛函可定义为

$$J(v, \mu, q) = (\nabla \cdot q - f, \nabla \cdot q - f) + (\mu + \nabla v, \mu + \nabla v) + (A\mu - q, A\mu - q). \tag{4}$$

与(3)等价的最小二乘极小问题为：求$(u, \lambda, \sigma) \in V \times \Lambda \times W$，使得

$$J(u, \lambda, \sigma) = \inf_{v \in V,\, \mu \in \Lambda,\, q \in W} J(v, \mu, q).$$

相应的变分形式为：求$(u, \lambda, \sigma) \in V \times \Lambda \times W$，使得

$$a(u, \lambda, \sigma; v, \mu, q) = (f, \nabla \cdot q), \quad \forall\, v \in V, \quad \mu \in \Lambda, \quad q \in W, \tag{5}$$

其中

$$a(u, \lambda, \sigma; v, \mu, q) = (\nabla \cdot \sigma, \nabla \cdot q) + (\lambda + \nabla u, \mu + \nabla v) + (A\lambda - \sigma, A\mu - q). \tag{6}$$

为证明变分形式 (5) 的解是存在唯一的，我们首先说明双线性形式 $a(\cdot;\cdot)$ 的强制性。

**定理1**　双线性形式 $a(\cdot;\cdot)$ 是强制的，即存在常数 $C>0$，使得对任意的 $v\in V$，$\mu\in\Lambda$，$q\in W$，有

$$a(v,\mu,q;v,\mu,q)\geq C\big(\parallel v\parallel_{1,\Omega}^2+\parallel \mu\parallel_{0,\Omega}^2+\parallel q\parallel_{H(\mathrm{div};\Omega)}^2\big). \tag{7}$$

**证明**　由 (6) 式，知

$$\begin{aligned}a(v,\mu,q;v,\mu,q) &= (\nabla\cdot q,\nabla\cdot q)+(\mu+\nabla v,\mu+\nabla v)+(A\mu-q,A\mu-q)\\ &= (\nabla\cdot q,\nabla\cdot q)+2\beta(q,\nabla v)+\beta^2(v,v)-2\beta(\nabla v,q)-\beta^2(v,v)\\ &\quad +(\mu,\mu)+2(\mu,\nabla v)+(\nabla v,\nabla v)+(A\mu,A\mu)-2(A\mu,q)+(q,q),\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $\beta>0$ 是适当选取的常数。应用 Green 公式，并进一步整理，有

$$\begin{aligned}a(v,\mu,q;v,\mu,q) &= (\nabla\cdot q-\beta v,\nabla\cdot q-\beta v)+(q,q)-2(A\mu+\beta\nabla v,q)\\ &\quad +(A\mu+\beta\nabla v,A\mu+\beta\nabla v)-(A\mu+\beta\nabla v,A\mu+\beta\nabla v)\\ &\quad +(A\mu,A\mu)+2(\nabla v,\mu)+(\mu,\mu)+(\nabla v,\nabla v)-\beta^2(v,v)\\ &= (\nabla\cdot q-\beta v,\nabla\cdot q-\beta v)+(A\mu+\beta v-q,A\mu+\beta v-q)\\ &\quad +\big(\mu+(E-\beta A)\nabla v,\mu+(E-\beta A)\nabla v\big)+2\beta(A\nabla v,\nabla v)\\ &\quad -\beta^2(A\nabla v,A\nabla v)-\beta^2(\nabla v,\nabla v)-\beta^2(v,v)\\ &\geq 2\beta(A\nabla v,\nabla v)-\beta^2(A\nabla v,A\nabla v)-\beta^2(\nabla v,\nabla v)-\beta^2(v,v),\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $E$ 是单位矩阵。

由于 $v(x)=0$，$x\in\Gamma_D$，所以由 Poincaré-Friedrichs 不等式知，存在正常数 $C_F$，使得

$$\parallel v\parallel_{0,\Omega}^2\leq C_F\parallel\nabla v\parallel_{0,\Omega}^2\,. \tag{10}$$

又由 (2) 知

$$2\beta(A\nabla v,\nabla v)\geq 2\beta\alpha_*(\nabla v,\nabla v), \tag{11}$$

$$\beta^2(A\nabla v,A\nabla v)\leq\beta^2\alpha^{*2}(\nabla v,\nabla v). \tag{12}$$

从而由 (10), (11) 和 (12)，有

$$a(v,\mu,q;v,\mu,q)\geq\beta\big(2\alpha_*-\beta(1+C_F+\alpha^{*2})\big)\parallel\nabla v\parallel_{0,\Omega}^2\,. \tag{13}$$

令 $\beta=\alpha_*/(1+C_F+\alpha^{*2})$，则有

$$\beta\big(2\alpha_*-\beta(1+C_F+\alpha^{*2})\big)=\frac{{\alpha_*}^2}{1+C_F+\alpha^{*2}}>0, \tag{14}$$

因此

$$a(v,\mu,q;v,\mu,q)\geq C\parallel\nabla v\parallel_{0,\Omega}^2\geq C\parallel v\parallel_{1,\Omega}^2\,. \tag{15}$$

又由 $a(\cdot;\cdot)$ 的定义 (6)，显然有

$$a(v,\mu,q;v,\mu,q) \geq \| \nabla\cdot q \|_{0,\Omega}^2, \tag{16}$$

$$a(v,\mu,q;v,\mu,q) \geq \| \mu+\nabla v \|_{0,\Omega}^2, \tag{17}$$

$$a(v,\mu,q;v,\mu,q) \geq \| A\mu - q \|_{0,\Omega}^2 \cdot \tag{18}$$

从而由 (15) 和 (17)，有

$$\begin{aligned}\| \mu \|_{0,\Omega}^2 &= \| \mu+\nabla v-\nabla v \|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq 2\| \mu+\nabla v \|_{0,\Omega}^2 + 2\| \nabla v \|_{0,\Omega}^2 \leq Ca(v,\mu,q;v,\mu,q),\end{aligned} \tag{19}$$

进一步由 (18) 和 (19)，有

$$\begin{aligned}\| q \|_{0,\Omega}^2 &= \| q-A\mu+A\mu \|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq 2\| A\mu-q \|_{0,\Omega}^2 + 2\| A\mu \|_{0,\Omega}^2 \leq Ca(v,\mu,q;v,\mu,q).\end{aligned} \tag{20}$$

综合 (15), (16), (19) 和 (20) 便证得 (7) 成立。

**定理 2** 设 $f \in L^2(\Omega)$，则问题 (5) 存在唯一解 $(u,\lambda,\sigma) \in V\times\Lambda\times W$。

**证明** 考虑空间 $(V,\Lambda,W)$，其范数定义为

$$\| v \|_{1,\Omega} + \| \mu \|_{0,\Omega} + \| q \|_{H(\mathrm{div};\Omega)}, \quad v\in V, \quad \mu\in\Lambda, \quad q\in W.$$

由定理 1 知双线性形式 $a(\cdot;\cdot)$ 在空间 $(V,\Lambda,W)$ 中是强制的；而且由 Cauchy 不等式易证 $a(\cdot;\cdot)$ 在 $(V,\Lambda,W)$ 中是有界的。另外，当 $f \in L^2(\Omega)$ 时，线性形式 $f(\cdot) = (f,\cdot)$ 也是有界的，因此由 Lax-Milgram 引理知 (5) 的解是存在唯一的。

**定理 3** 设 $f \in L^2(\Omega)$，则格式 (5) 是稳定的。

**证明** 在 (5) 中令 $v=u$, $\mu=\lambda$, $q=\sigma$，则由定理 1，有

$$\begin{aligned}&\left(\|fsu\|_{1,\Omega}^2 + \| \lambda \|_{0,\Omega}^2 + \| \sigma \|_{H(\mathrm{div};\Omega)}^2\right) \\ &\leq Ca(u,\lambda,\sigma;u,\lambda,\sigma) = (f,\nabla\cdot\sigma) \\ &\leq C\| f \|_{0,\Omega}^2 + \varepsilon \| \nabla\cdot\sigma \|_{0,\Omega}^2 \leq C\| f \|_{0,\Omega}^2,\end{aligned} \tag{21}$$

从而格式 (5) 的稳定性得证。

## 3 最小二乘扩展混合有限元逼近

为简单起见，我们假定 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的凸多边形域或 $\mathbb{R}^3$ 中的凸多面体。$\mathcal{T}_h$ 是 $\Omega$ 的一个剖分，即

$$\Omega = \bigcup_{K\in\mathcal{T}_h} K,$$

且 $h=\max\{\mathrm{diam(K)}:\mathrm{K}\in\mathcal{T}_\mathrm{h}\}$。设 $V_h$，$\Lambda_h$ 和 $W_h$ 分别是 $V$，$\Lambda$ 和 $W$ 的有限维子空间，具有下面的逼近性质

$$\inf_{v_h\in V_h}\left\{\| v-v_h \|_{0,\Omega}+h\| v-v_h \|_{1,\Omega}\right\}\le Ch^{k+1}\| v \|_{k+1,\Omega}, \tag{22}$$

$$\inf_{\mu_h\in \Lambda_h}\| \mu-\mu_h \|_{0,\Omega}\le Ch^{r+1}\| \mu \|_{r+1,\Omega}, \tag{23}$$

$$\inf_{q_h\in W_h}\left\{\| q-q_h \|_{0,\Omega}+h\| q-q_h \|_{H(\mathrm{div};\Omega)}\right\}\le Ch^{s+1}\| q \|_{s+1,\Omega}, \tag{24}$$

其中 $k,r,s$ 为非负整数，$v\in H^{k+1}(\Omega)$，$\mu\in(H^{r+1}(\Omega))^n$，$q\in(H^{s+1}(\Omega))^n$。$V_h$，$\Lambda_h$ 和 $W_h$ 的一个标准的选法是 $k$，$r$ 和 $s$ 次的分片多项式空间，即

$$V_h=\left\{v_h\in C^0(\Omega):v_h|_K\in P_k(K),\ \forall K\in\mathcal{T}_h,\ v_h=0\ \text{在}\ \Gamma_D\ \text{上}\right\}, \tag{25}$$

$$\Lambda_h=\left\{\mu_h\in(C^0(\Omega))^n:\mu_h|_K\in(P_r(K))^n,\ \forall K\in\mathcal{T}_h\right\}, \tag{26}$$

$$W_h=\left\{q_h\in H(\mathrm{div};\Omega):q_h|_K\in(P_s(K))^n,\ \forall K\in\mathcal{T}_h,\ q_h\cdot n=0\ \text{在}\ \Gamma_N\ \text{上}\right\}, \tag{27}$$

其中 $P_m(K)$，$m=k,r,s$ 是单元 $K$ 上的 $m$ 次多项式空间。

定义 (5) 式的有限元逼近格式为：求 $(u_h,\lambda_h,\sigma_h)\in V_h\times\Lambda_h\times W_h$，使得

$$a(u_h,\lambda_h,\sigma_h;v_h,\mu_h,q_h)=(f,\nabla\cdot q_h),\quad \forall v_h\in V_h,\quad \mu_h\in\Lambda_h,\quad q_h\in W_h. \tag{28}$$

因为 $V_h\subset V$，$\Lambda_h\subset\Lambda$，$W_h\subset W$，所以由定理 1 知问题 (28) 的解存在唯一。

下面，我们将检验由格式 (28) 生成的线性方程组的条件数。为此，假定剖分 $\mathcal{T}_h$ 是正则的且满足逆假定，即存在常数 $\delta>0$，使得

$$\frac{h}{\mathrm{diam}(K)}\le\delta,\quad \forall K\in\mathcal{T}_h. \tag{29}$$

在假定 (29) 下，一般的标准有限元空间都满足下面的逆性质

$$|v_h|_{1,\Omega}\le Ch^{-1}\| v_h \|_{0,\Omega},\quad \forall v_h\in V_h, \tag{30}$$

$$|\nabla\cdot q_h|_{0,\Omega}\le Ch^{-1}\| q_h \|_{0,\Omega},\quad \forall q_h\in W_h. \tag{31}$$

设 $\{\varphi_l\}_{l=1}^L$，$\{\phi_i\}_{i=1}^M$ 和 $\{\psi_j\}_{j=1}^N$ 分别是空间 $V_h$，$\Lambda_h$ 和 $W_h$ 的基，则对任意的 $(u_h,\lambda_h,\sigma_h)\in V_h\times\Lambda_h\times W_h$，有

$$v_h=\sum_{l=1}^L\eta_l\varphi_l,\quad \mu_h=\sum_{i=1}^M\xi_i\phi_i,\quad q_h=\sum_{j=1}^N\zeta_j\psi_j.$$

记 $|\eta|$，$|\xi|$ 和 $|\zeta|$ 分别表示向量 $(\eta_1,\cdots,\eta_L)$，$(\xi_1,\cdots,\xi_M)$ 和 $(\zeta_1,\cdots,\zeta_N)$ 的 $L^2$ 范数。在假定 (29) 下，常见的有限元空间都满足如下的假定：存在正常数 $\alpha_i$，$\beta_i$ 和 $\gamma_i\ (i=1,2)$，使得

$$\alpha_1h^n|\eta|\le\| v_h \|_{0,\Omega}\le\alpha_2h^n|\eta|,\quad \forall v_h\in V_h, \tag{32}$$

$$\beta_1h^n|\xi|\le\| \mu_h \|_{0,\Omega}\le\beta_2h^n|\xi|,\quad \forall \mu_h\in\Lambda_h, \tag{33}$$

$$\gamma_1h^n|\zeta|\le\| q_h \|_{0,\Omega}\le\gamma_2h^n|\zeta|,\quad \forall q_h\in W_h. \tag{34}$$

**定理 4** 假定 (30)-(34) 成立，则线性方程组 (28) 的条件数为 $O(h^2)$。

证明 由定理 1，$a(\cdot;\cdot)$ 的有界性以及 (30) 和 (31)，知

$$C_1(\|v_h\|_{0,\Omega}^2+\|\mu_h\|_{0,\Omega}^2+\|q_h\|_{0,\Omega}^2)$$
$$\le a(v_h,\mu_h,q_h;v_h,\mu_h,q_h)\le C_2h^{-2}(\|v_h\|_{0,\Omega}^2+\|\mu_h\|_{0,\Omega}^2+\|q_h\|_{0,\Omega}^2).$$

再结合 (32), (33) 和 (34)，有

$$C_1h^n(|\eta|^2+|\xi|^2+|\zeta|^2)\le a(v_h,\mu_h,q_h;v_h,\mu_h,q_h)\le C_2h^{n-2}(|\eta|^2+|\xi|^2+|\zeta|^2),$$

此即证得 (28) 的条件数为 $O(h^2)$。

进一步，我们得出下面的误差估计。

**定理 5** 设 $u\in H^{k+1}(\Omega)$, $\lambda\in(H^{r+1}(\Omega))^n$, $\sigma\in(H^{s+1}(\Omega))^n$，则有

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega}+\|\lambda-\lambda_h\|_{0,\Omega}+\|\sigma-\sigma_h\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}$$
$$\le C(h^k\|u\|_{k+1,\Omega}+h^{r+1}\|\lambda\|_{r+1,\Omega}+h^s\|\sigma\|_{s+1,\Omega}). \tag{35}$$

证明 由 (5) 和 (28)，可得到误差方程

$$a(u-u_h,\lambda-\lambda_h,\sigma-\sigma_h;v_h,\mu_h,q_h)=0,\quad \forall\, v_h\in V_h,\ \mu_h\in\Lambda_h,\ q_h\in W_h. \tag{36}$$

设 $u_I\in V_h$, $\lambda_I\in\Lambda_h$ 和 $\sigma_I\in W_h$ 分别是 $u$, $\lambda$ 和 $\sigma$ 的标准有限元插值，则有下面的插值估计[1,2]

$$\|u-u_I\|_{0,\Omega}+h\|u-u_I\|_{1,\Omega}\le Ch^{k+1}\|u\|_{k+1,\Omega}, \tag{37}$$

$$\|\lambda-\lambda_I\|_{0,\Omega}\le Ch^{r+1}\|\lambda\|_{r+1,\Omega}, \tag{38}$$

$$\|\sigma-\sigma_I\|_{0,\Omega}+h\|\sigma-\sigma_I\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}\le Ch^{s+1}\|\sigma\|_{s+1,\Omega}. \tag{39}$$

由定理 1 和 (36)，有

$$\|u_h-u_I\|_{1,\Omega}^2+\|\lambda_h-\lambda_I\|_{0,\Omega}^2+\|\sigma_h-\sigma_I\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}^2$$
$$\le Ca(u_h-u_I,\lambda_h-\lambda_I,\sigma_h-\sigma_I;u_h-u_I,\lambda_h-\lambda_I,\sigma_h-\sigma_I)$$
$$= Ca(u-u_I,\lambda-\lambda_I,\sigma-\sigma_I;u_h-u_I,\lambda_h-\lambda_I,\sigma_h-\sigma_I)$$
$$\le C(\|u-u_I\|_{1,\Omega}^2+\|\lambda-\lambda_I\|_{0,\Omega}^2+\|\sigma-\sigma_I\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}^2)^{\frac12}$$
$$\times(\|u_h-u_I\|_{1,\Omega}^2+\|\lambda_h-\lambda_I\|_{0,\Omega}^2+\|\sigma_h-\sigma_I\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}^2)^{\frac12}.$$

进一步，利用 (37), (38) 和 (39)，可得

$$\|u_h-u_I\|_{1,\Omega}+\|\lambda_h-\lambda_I\|_{0,\Omega}+\|\sigma_h-\sigma_I\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}$$
$$\le C(\|u-u_I\|_{1,\Omega}+\|\lambda-\lambda_I\|_{0,\Omega}+\|\sigma-\sigma_I\|_{H(\mathrm{div};\Omega)})$$
$$\le C(h^k\|u\|_{k+1,\Omega}+h^{r+1}\|\lambda\|_{r+1,\Omega}+h^s\|\sigma\|_{s+1,\Omega}). \tag{40}$$

由 (40) 并利用三角不等式便可证得 (35)。

## 4　数值算例

为验证所提格式的有效性，我们首先在区域 $[0,1]$ 上考虑一维问题

$$\begin{cases} -(au_x)_x = f, & x \in (0,1), \\ u(0)=0, & u(1)=0, \end{cases} \tag{41}$$

其中

$$a = \frac{1}{100}, \quad f = \frac{1}{100}\mathrm{e}^x(x^2+3x).$$

容易验证方程的真解为

$$u = \mathrm{e}^x x(x-1), \quad \lambda = -\mathrm{e}^x(x^2+x-1), \quad \sigma = -\frac{1}{100}\mathrm{e}^x(x^2+x-1).$$

取 $\Lambda_h$ 为分片常数多项式空间，$V_h$ 和 $W_h$ 为分片线性多项式空间，用Matlab编程计算近似解 $u_h$，$\lambda_h$ 和 $\sigma_h$，得出真解和近似解的误差以及最小二乘扩展混合有限元格式的收敛阶，详见表1和表2。

表1：误差

| 范　数 | 步长 $h$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0.01 | 0.005 | 0.0025 | 0.00125 |
| $\Vert u-u_h \Vert_{1,\Omega}$ | 0.024040625 | 0.012039385 | 0.006024433 | 0.003013399 |
| $\Vert \lambda-\lambda_h \Vert_{0,\Omega}$ | 0.024040621 | 0.012039385 | 0.006024433 | 0.003013399 |
| $\Vert \sigma-\sigma_h \Vert_{H(\mathrm{div};\Omega)}$ | 0.000620657 | 0.000310923 | 0.000155610 | 0.000077842 |

表2：收敛阶

| 范　数 | 收敛阶 | | |
|---|---|---|---|
| | $\frac{h_1}{h_2}=\frac{0.01}{0.005}$ | $\frac{h_2}{h_3}=\frac{0.005}{0.0025}$ | $\frac{h_3}{h_4}=\frac{0.0025}{0.00125}$ |
| $\Vert u-u_h \Vert_{1,\Omega}$ | 0.9977 | 0.9989 | 0.9994 |
| $\Vert \lambda-\lambda_h \Vert_{0,\Omega}$ | 0.9977 | 0.9989 | 0.9994 |
| $\Vert \sigma-\sigma_h \Vert_{H(\mathrm{div};\Omega)}$ | 0.9972 | 0.9986 | 0.9993 |

通过表中数据可以看出，当步长 $h$ 折半递减时，误差也折半递减，误差的收敛阶达到了最优，这说明本文所提格式是有效的。进一步，我们绘出真解和最小二乘扩展混合有限元解 (取步长 $h=0.01$) 的比较图，见图1至图3。

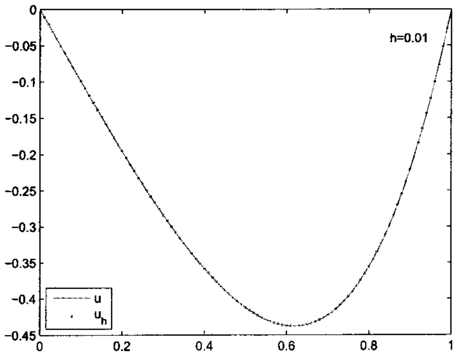


图 1: $u$ 与 $u_h$ 的比较图

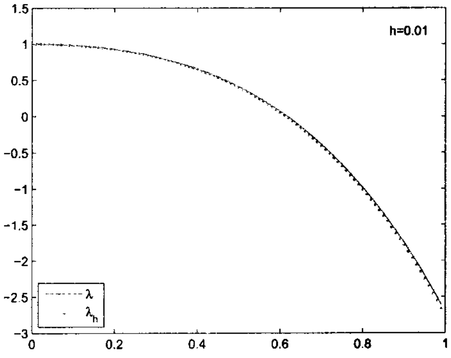


图 2: $\lambda$ 与 $\lambda_h$ 的比较图

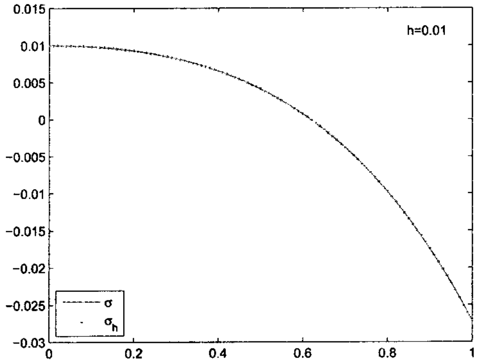


图 3: $\sigma$ 与 $\sigma_h$ 的比较图

在区域 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$ 上考虑下列二维问题

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(a\nabla u)=f, & x\in\Omega, \\ u(x)=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{42}$$

其中

$$u=16(1-x)xy(1-y)\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\arctan\Big(20\Big(\frac{1}{16}-\Big(x-\frac{1}{2}\Big)^2-\Big(y-\frac{1}{2}\Big)^2\Big)\Big)\Big),\quad a=3.$$

用Matlab编程计算近似解 $u_h$，$\lambda_h$ 和 $\sigma_h$，得出真解和近似解的误差以及最小二乘扩展混合有限元格式的收敛阶，详见表3。

表 3: $\| u-u_h \|_{0,\Omega}$，$\|\lambda-\lambda_h\|_{0,\Omega}$ 及 $\|\sigma-\sigma_h\|_{0,\Omega}$ 的误差及收敛阶

| 节点数 | $\|u-u_h\|_{0,\Omega}$ | $\|\lambda-\lambda_h\|_{0,\Omega}$ | $\|\sigma-\sigma_h\|_{0,\Omega}$ |
|---|---|---|---|
| 145 | 0.1321 | 0.3497 | 1.0526 |
| 545 | 0.0338 | 0.1673 | 0.4995 |
| 2113 | 0.0085 | 0.0826 | 0.2445 |
| 收敛阶 | 1.9915 | 1.0182 | 1.0307 |

通过表中数据可以看出，误差的收敛阶达到了最优，与理论结果一致。进一步，我们绘出最小二乘扩展混合有限元解 $u_h$, $\lambda_h$ 与真解 $u$, $\lambda$ 的比较图，见图 4 至图 5。

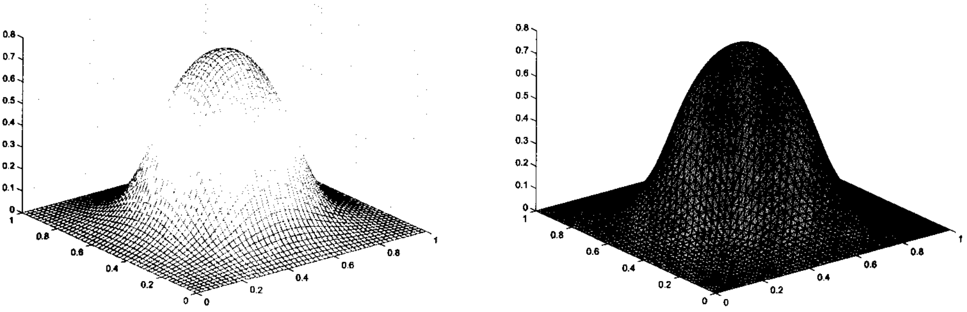

图 4: $u$ 与 $u_h$ 的比较图 (左图为真解，右图为数值解)

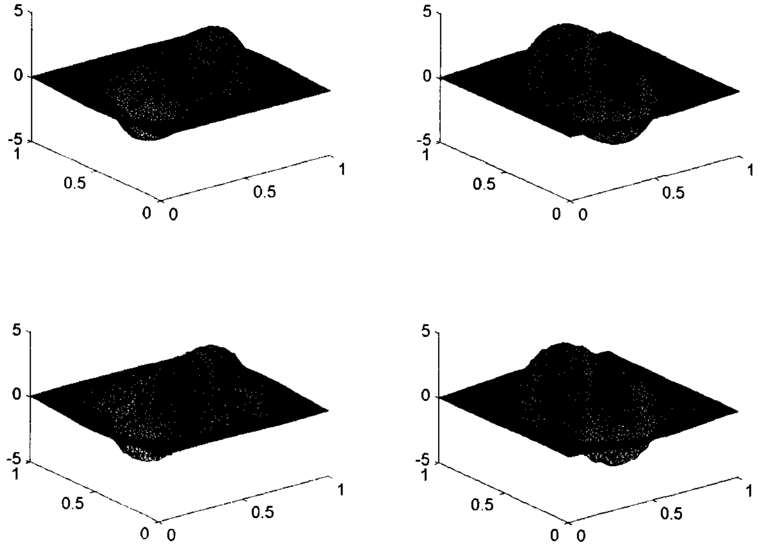

图 5: $\lambda$, $\sigma$ 与 $\lambda_h$, $\sigma_h$ 的比较图 (上面两图分别为真解 $\lambda$, $\sigma$，下面两图分别为数值解 $\lambda_h$, $\sigma_h$)

## 参考文献:


[1] Ciarlet P G. The Finite Element Method for Elliptic Problems[M]. Oxford: North-Holland, 1978

[2] Raviart P A, Thomas J M. A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems[J]. Mathematical Aspects of the Finite Element Method, Lecture Notes in Mathematics, 1977, (606): 292-315

[3] Chen Z X. Expanded mixed finite element methods for linear second-order elliptic problems[J]. RAIRO Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 1998, 32(4): 479-499

[4] Guo L, Chen H Z. An expanded characteristic mixed finite element method for a convection-dominated transport problem[J]. Journal of Computational Mathematics, 2005, 23(5): 479-490

[5] Pehlivanov A I, Carey G F, Lazarov R D. Least-squares mixed finite elements for second-order elliptic problems[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1994, 31(5): 1368-1377

[6] Raviart P A, Carey G F. Error estimate for least-squares mixed finite elements[J]. RAIRO Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 1994, 28(5): 499-516

[7] Cai Z, *et al.* First-order system least squares for second-order partial differential equations: part I[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1994, 31(6): 1785-1799

[8] Yang D P. Analysis of least-squares mixed finite element methods for nonlinear non-stationary convection-diffusion problems[J]. Mathmatics of Computation, 1999, 69: 929-963

[9] Rui H X, Kim S, Kim S D. A remark on least-squares mixed element methods for reaction-diffusion problems[J]. J Computational and Applied Mathematics, 2007, 202: 230-236


# Least-squares Expanded Mixed Finite Element Methods for Second-order Elliptic Problems


DING Sheng, CHEN Huan-zhen†

(School of Mathematical Sciences, Shandong Normal University, Jinan 250014)



**Abstract:** To overcome the difficulties when calculating the inverse of a small diffusive coefficient when simulating the diffusive problems within a low permeability zone by a least-squares mixed finite element method, we use an expanded mixed finite element instead of a mixed finite element and develop a least-squares expanded mixed finite method for second-order elliptic problems. We prove the *stability and convergence for the proposed procedure. The analysis shows that the method inherits* the advantages of least-squares and expanded mixed finite element methods, such as it is not necessary to calculate the inverse of a small diffusive coefficient; approximating the unknown, its gradient and its flux directly; the finite element space being free of LBB condition as well as the stiff matrix being symmetry and positive-definite. Numerical tests are performed to confirm the theoretical analysis.



**Keywords:** second-order elliptic problem; least-squares method; expanded mixed finite element method; optimal-order convergence



**Received:** 09 Sep 2008. **Accepted:** 07 Sep 2009.

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (10271068; 10971254); the Natural Science Foundation of Shandong Province (Y2007A14); the Shangdong Province Young and Middle-Aged Scientists Research Awards Fund (2008BS01008).



†**Corresponding author:** H. Chen. E-mail address: chhzh@sdnu.edu.cn